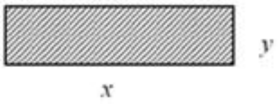
1. En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcula razonadamente la cuantía del máximo premio que se pueda obtener en este concurso.



$A(x, y) = x \cdot y$ (Función Objetivo)

Condición: $2x+2y = 2$

Condición: $2x+2y = 2 \Rightarrow x+y = 1 \Rightarrow y = 1-x$

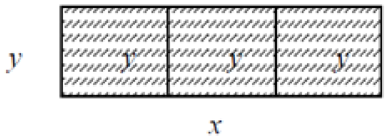
Función Objetivo: $A(x, y) = x \cdot y \Rightarrow A(x) = x \cdot (1-x) = x - x^2 \quad A'(x) = 1-2x$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 1-2x = 0 \Rightarrow x = 1/2$ m. $A''(x) = -2 \Rightarrow A''(1/2) = -2 < 0$ (es un máximo)

Solución: $x = 5$ dm. e $y = 5$ dm., siendo Área $= 25$ dm^2.

Cuantía máxima a percibir por el premio = 25 €.

2. Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes. Las alambradas de las divisiones deben quedar paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que su área sea la mayor posible?



$A(x, y) = x \cdot y$ (Función objetivo)

Condición: $2x+4y = 160$

Condición: $2x+4y = 160 \Rightarrow y = \dfrac{80-x}{2}$

Función: $A(x, y) = x \cdot y$

$$A(x) = x \cdot \left(\frac{80-x}{2}\right) = 40x - \frac{x^2}{2}$$

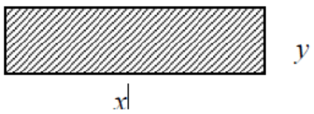
$A'(x) = 40-x \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x = 40$ m.

$A''(x) = -1 < 0$ (el punto es un máximo)

Para $x = 40$ m. resulta $y = \dfrac{80-40}{2} \Rightarrow y = 20$ m.

Solución: $x = 40$ m, $y = 20$ m.

3. Se dispone de 400 metros de alambrada para vallar un solar rectangular. ¿Qué dimensiones deberá tener el solar para que con esa alambrada se limite la mayor área posible? Razonar el proceso.



Función: $A(x, y) = x \cdot y$

Condición: $2x+2y = 400$

Condición: $2x+2y = 400 \Rightarrow x + y = 200 \Rightarrow y = 200-x$

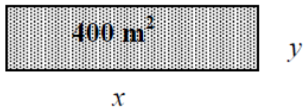
Función: $A(x, y) = x \cdot y \qquad A(x) = x \cdot (200-x) = 200x - x^2$

$A'(x) = 200-2x \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x = 100$ m

$A''(x) = -2 < 0 \Rightarrow x = 100$ es un máximo, siendo $y = 200-100 = 100$

Solución: $x = 100$ e $y = 100$, es un cuadrado

4. Un terreno de forma rectangular tiene 400 m^2 y va a ser vallado. El precio del metro lineal de valla es de 4 euros. ¿Cuáles serán las dimensiones del solar que hacen que el costo de la valla sea mínimo?



Perímetro del vertedero: $P = 2x+2y$

Coste cerca: $4\cdot P = 4(2x)+4(2y) = 8x+8y$ (función objetivo)

Condición: $x\cdot y = 400$ $\qquad$ Condición: $x\cdot y = 400 \Rightarrow y = \dfrac{400}{x}$

Coste cerca: $C(x, y) = 8x+8y$ $\qquad C(x) = 8x+8\left(\dfrac{400}{x}\right) = 8x+\dfrac{3200}{x}$

$C'(x) = 8-\dfrac{3200}{x^2} \Rightarrow C'(x) = 0 \Rightarrow x^2=400 \Rightarrow x = \pm 20$; Solución válida $x = 20$ m.

$C''(x) = 3200\cdot\dfrac{2}{x^3} \Rightarrow C''(20)= 0.8 > 0$ $\qquad$ Es un mínimo

Para $x = 20$ m., siendo $y = \dfrac{400}{x} \Rightarrow y = 400/20 = 20$ m.

Solución: Las dimensiones del solar son cuadradas con $x = 20$m. e $y = 20$m.

5. Supongamos que el solar del problema anterior tiene 200 m^2 y un lado a lo largo del río requiere una valla más costosa de 5 euros el metro lineal. ¿Qué dimensiones darán el costo más bajo?

Función: $C(x, y) = 4\cdot(2x) + 4y + 5y$
Condición: $x\cdot y = 200$ $\qquad$ Condición: $x\cdot y = 200 \Rightarrow y = \dfrac{200}{x}$

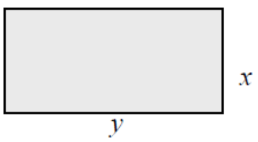
Función objetivo: $C(x, y) = 4\cdot(2x) + 4y + 5y = 8x + 9y$ $\qquad C(x) = 8x + 9\dfrac{200}{x} = 8x + \dfrac{1800}{x}$

$C'(x) = 8x+ \dfrac{1800}{x^2} \Rightarrow C'(x)=0 \Rightarrow x = \sqrt{225} = \pm 15$ (Solución válida: 15 m.)

$C''(x) = 1800\dfrac{2}{x^2} = \dfrac{3600}{x^3} \Rightarrow C''(15) = \dfrac{3600}{15^3} > 0$. Luego, en $x = 15$ hay un mínimo, siendo $y = 40/3$.

Solución: Las dimensiones del solar serán en este caso $x = 15$ m. e $y = 40/3$ m.

6. Un pastor dispone de 1000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. Halla las dimensiones de la cerca para que el área encerrada sea máxima.



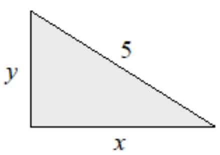
Función: $f(x, y) = x\cdot y$
Condición: $2x + y = 1.000 \Rightarrow y = 1000-2x$

$f(x, y) = x\cdot y$ $\qquad f(x) = x\cdot(1.000-2x)$ $\qquad f(x)=1.000\,x - 2\,x^2$

$f'(x) = 1.000 - 4x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 250$ $\qquad f''(x) = -4 \Rightarrow f''(250) < 0$.

Por lo tanto, $x = 250$ es un máximo. $\qquad$ **Solución:** $x = 250$ m e $y = 500$ m .

7. Un segmento de longitud de 5 cm. apoya sus extremos en los semiejes positivos OX y OY, de tal manera que forma con éstos un triángulo. Halla las dimensiones del triángulo de área máxima así construido.



Función: $f(x, y)= \dfrac{x\cdot y}{2}$ $\qquad$ Condición: $x^2+y^2 = 5 \Rightarrow y = \sqrt{5-x^2}$

Condición $x^2 + y^2 = 5$ $\qquad$ Función: $f(x, y) = \dfrac{x\cdot y}{2}$ $\qquad f(x) = \dfrac{x\sqrt{5-x^2}}{2}$

$f'(x)=\dfrac{5-3x^2}{2\sqrt{5-x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5/3}$ (La solución negativa no es válida).

$f''(x)=\dfrac{-10x}{5-x^2} \Rightarrow f''\left(\sqrt{5/3} < 0\right)$. Por lo tanto, es un máximo. $\qquad$ **Solución:** $x = \sqrt{5/3}$; $y = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$